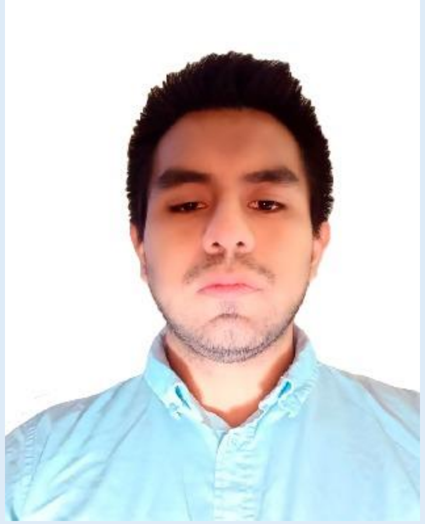


Profesor:
Ricardo Espino Lizama

ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS

NÚMEROS COMPLEJOS

Unidad Imaginaria

Definición

La unidad imaginaria se obtiene al extraer raíz cuadrada de -1, se representa de la siguiente manera :

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

también se define como :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Potencias de la Unidad Imaginaria

$$\boxed{\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}}$$

Propiedades :

1. $\boxed{i^{4n} = 1 ; n \varepsilon Z}$

Ejemplo : $i^{480} = i^{4(120)} = 1$

2. $\boxed{i^{4n+k} = i^k ; (n;k \varepsilon Z)}$

Ejemplo : $i^{47} = i^{4(11)+3} = i^3 = -i$

$i^{-10} = i^{-3(4)+2} = i^2 = -1$

Números Complejos

Son aquellos números que tienen la forma :

$$\boxed{Z = a + bi = (a\ ;\ b);\ a, b \in R}$$

donde : $\begin{cases} a = Re(z) \text{ se llama, parte real de } Z \\ b = Im(z) \text{ se llama parte imaginaria de } Z \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE LOS COMPLEJOS

Complejos Conjugados $(\overline{Z})$

Son aquellos que sólo difieren en el signo de la parte imaginaria.

Ejemplo :

$Z = 3 + 4i$; su conjugado es : $\overline{Z} = 3 - 4i$

Complejos Opuestos (Zop)

Son aquellos que sólo difieren en los signos de la parte real e imaginaria, respectivamente.

Ejemplo :

$Z = 5 - 2i$; su opuesto es : $Zop = -5 + 2i$

Complejos Iguales

Son aquellos que tienen partes reales e imaginarias, respectivamente, iguales.

Ejemplo :

De la igualdad : $a + bi = 8 - 11i$

tenemos : $a = 8;\ b = -11$

Complejo Nulo

Son aquellos que tienen su parte real e imaginaria, respectivamente, iguales a cero.

Si : $a + bi$ es nulo $\Rightarrow a + bi = 0$

Luego : $a = 0;\ b = 0$

Complejo Imaginario Puro

Es aquel cuya parte real es igual a cero y su parte imaginaria distinta de cero.

Si : $a + bi \rightarrow$ es imaginario puro $\Rightarrow a = 0$

Complejo Real

Si un complejo es real, entonces su parte imaginaria igual a cero :

Si : $a + bi \rightarrow$ es real $\Rightarrow b = 0$

Representación de los Complejos

I. Representación Cartesiana o Geométrica

En este caso, el complejo está representado de la forma:

$$\boxed{Z = a + bi}$$

Gráfica del Complejo

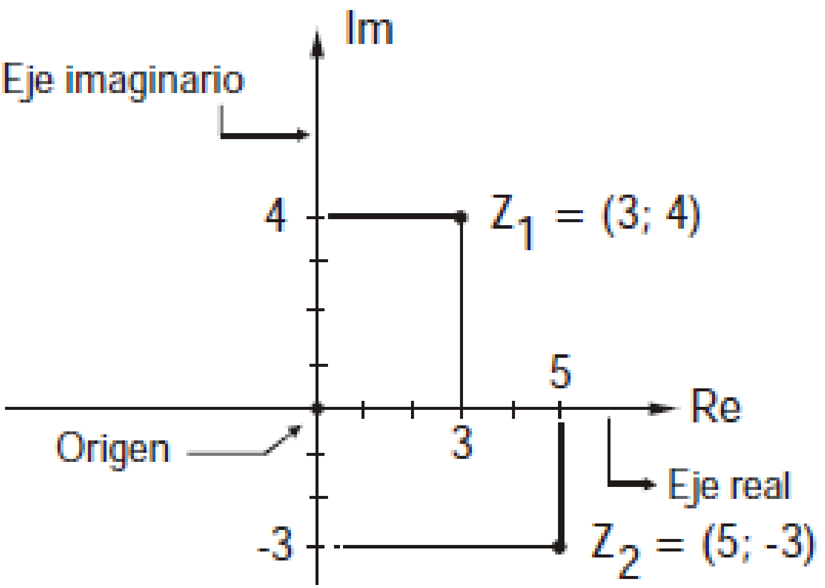
Cada complejo es un punto en el plano, para ubicarlo se le representa en el llamado plano complejo, Gaussiano o de Argand, el cual está formado por un eje vertical (eje imaginario) y un eje horizontal (eje real).

Ejemplo :

Graficar : $Z_1 = 3 + 4i$

$Z_2 = 5 - 3i$

En el plano Gaussiano :



Observación : Cada complejo se representa por un punto en el plano al cual se le llama afijo del complejo.

II. *Representación Polar o Trigonométrica :*

En este caso, el complejo adopta la forma :

$$\boxed{Z = \rho\,(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)}$$

Donde : $\rho \rightarrow$ módulo; $\rho > 0$

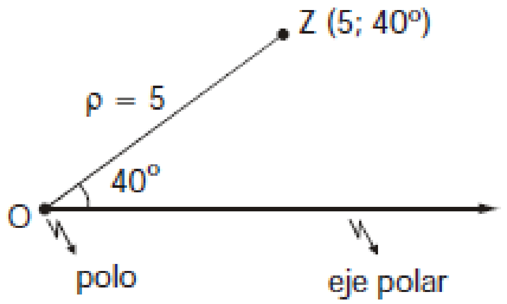
$\theta \rightarrow$ argumento; $0 \leq \theta < 2\pi$

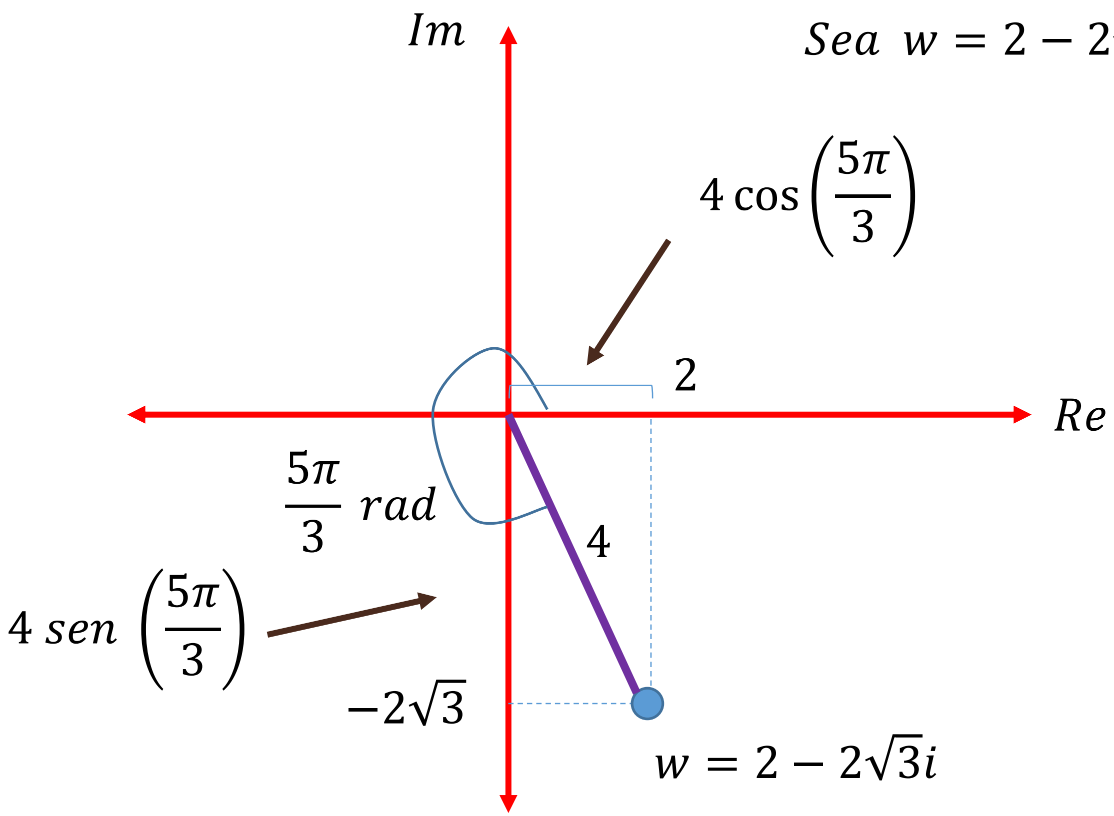
Gráfica del Complejo

En este caso, se utiliza el sistema de coordenadas polares el cual está formado por un punto fijo llamado polo y una semirecta que parte del polo, llamado eje polar. El módulo (ρ) es la distancia del polo al punto que representa el complejo y el argumento (θ) el ángulo positivo medido en sentido antihorario desde el eje polar hasta el radio vector $\overrightarrow{OZ}$.

Graficar : $Z = 5(\text{Cos}40° + i\text{Sen}40°)$

En el sistema de coordenadas polares :





$Sea\ \ w = 2 - 2\sqrt{3}i$

$Forma\ Binomial$

$$\boldsymbol{w = 2 - 2\sqrt{3}i}$$

$$w = 2 - 2\sqrt{3}i = 4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 4sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)i$$

$$w = 2 - 2\sqrt{3}i = 4(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)i)$$

$$w = 2 - 2\sqrt{3}i = 4cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$Forma\ polar, trigonométrica\ o\ forma\ CIS$

$$\boldsymbol{w = 4cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$$

$Forma\ exponencial$

$$\boldsymbol{w = e^{i5\frac{\pi}{3}}}$$

$z = a + bi$

Módulo de Z: $|z| = \sqrt{z.\bar{z}} \quad \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argumento Principal: $\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$z = |z|cis(\theta)$

$z = |z|e^{i\theta}$

$$cis(a)cis(b) = cis(a+b)$$

$$\frac{cis(a)}{cis(b)} = cis(a-b)$$

$$(cisa)^n = cis(na)$$

Propiedades:

$$|z| = |\bar{z}| = |z^*|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1^2| = |z_1|^2$$

$$|z_1^n| = |z_1|^n$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

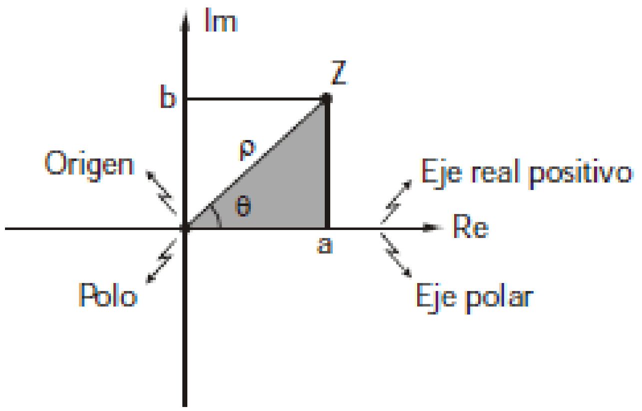
$$\overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1^2} = \bar{z}_1 .^2$$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Relación entre la Representación Cartesiana y Polar

Sea el complejo : $Z = a + b\,i$ (a, b >0)



Para transformar de cartesiana a polar se calcula ρ y θ. En el caso inverso, se calcula el valor de la función trigonométrica.

En la figura sombreada :

$$\begin{cases} * \ \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ * \ a = \rho \operatorname{Cos}\theta \\ * \ b = \rho \operatorname{Sen}\theta \\ * \ \theta = \operatorname{ArcTg}\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$a + bi = \rho \operatorname{Cos}\theta + (\rho \operatorname{Sen}\theta)i$$

$$\boxed{a + bi = \rho(\operatorname{Cos}\theta + i\operatorname{Sen}\theta)}$$

Aplicación :

1. Transformar : $Z = 3 + 4i$

   $* \quad \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

   $* \quad \theta = \operatorname{ArcTg}\dfrac{4}{3} = 53°$

   $\Rightarrow 3 + 4i = 5(\operatorname{Cos}53° + i\operatorname{Sen}53°)$

2. Transformar : $Z = 6\ (Cos37° + i\ Sen37°)$

$$Z = 6(Cos37° + i\ Sen37°)$$

$$Z = 6\left(\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right)$$

$$Z = \frac{24}{5} + \frac{18}{5}i$$

III. Representación de Euler

En este caso, se tiene :

$$\rho(Cos\theta + i\,Sen\theta) = \rho e^{i\theta}$$

θ → expresado en radianes

Se cumple :

$$\boxed{Cos\theta + iSen\theta = e^{i\theta}}$$

Siendo : e = 2,71828 .... (base de los logaritmos naturales).

Asimismo :

$$\boxed{a + bi = \rho\,(Cos\theta + iSen\theta) = \rho\,e^{i\theta}}$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

I. *Operaciones en forma cartesiana*

a) ***Adición y multiplicación***

Se utilizan las mismas reglas algebraicas.

Ejemplo : $(3+i)(3+2i)$ - $(5\text{-}4i)$

Resolución :

$$9+6i+3i+2i^2-5+4i$$
$$=9+6i+3i-2-5+4i$$
$$=2+13i$$

b) ***División***

Se multiplica el numerador y denominador por el complejo conjugado de este último.

Ejemplo : $Z=\dfrac{2+3i}{3+i}$

$$Z=\frac{2+3i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{6-2i+9i-3i^2}{9-i^2}$$

$$Z=\frac{6+7i+3}{9-(-1)}=\frac{9+7i}{10}=\frac{9}{10}+\frac{7}{10}i$$

c) ***Potenciación*** :
Se utiliza el teorema del binomio.

Ejemplo:

$$(2i+3)^2 = 4i^2 + 12i + 9$$
$$= -4 + 12i + 9$$
$$= 5 + 12i$$

d) ***Radicación*** :
En general se asume que la raíz adopta la forma $(a+bi)$; luego a y b se hallan por definición de radicación.

Ejemplo : $\sqrt{5+12i}$

$$\sqrt{5+12i} = a + bi$$

Elevando al cuadrado

$$5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$$

Igualando :

$$5 = a^2 - b^2 ;\ 12 = 2ab$$

Resolviendo :

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5+12i} = 3 + 2i$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5+12i} = -3 - 2i$$

Observación :

* $(1 \pm i) = \pm 2i$

* $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

* $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

Operaciones en forma polar

a) ***Multiplicación*** :
En este caso, los módulos se multiplican y los argumentos se suman.

$$Z_1 = \rho_1(\text{Cos}\,\theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$$

$$Z_2 = \rho_2(\text{Cos}\,\theta_2 + i\,\text{Sen}\,\theta_2)$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_1 Z_2 = \rho_1 \rho_2 [\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

b) ***División*** :
En este caso, los módulos se dividen y los argumentos se restan.

$$Z_1 = \rho_1 (\text{Cos}\ \theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$$

$$Z_2 = \rho_2 (\text{Cos}\ \theta_2 + i\,\text{Sen}\,\theta_2)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]}$$

c) ***Potenciación*** :

En este caso, el exponente eleva al módulo y multiplica al argumento.

$$[\rho(\cos\theta + i\,\text{Sen}\theta)]^n = \rho^n[\cos n\theta + i\,\text{Sen}\,n\theta]$$

d) ***Radicación*** :

En este caso, se aplica la fórmula de De Moivre.

Sea : $Z = \rho(\cos\theta + i\text{Sen}\theta)$

$$\boxed{\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1)}$$

Nota : observa que $\sqrt[n]{z}$ tiene "n" valores.

Ejemplo :

Hallar las raíces cúbicas de la unidad.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1+0i} = \sqrt[3]{\cos 0° + i\,\text{Sen}0°}$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(\frac{0° + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(0° + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

$k = 0 \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

$k = 1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$

$k = 2 \rightarrow \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2$

∴ Raíces cúbicas de la unidad :

$1;\ w;\ w^2$.

donde :

* $w^3 = 1$
* $1 + w + w^2 = 0$

01. Si z es un número complejo definido por $z=\dfrac{\overline{(1;-1)}.(4;3)}{(0;-25)(2;1)^2(4;-3)}$, **determine el módulo de z.**

A) $5^{-3}\sqrt{2}$ B) 5^8 C) $5^7\sqrt{2}$

D) 5^7 E) $5^6\sqrt{2}$

$(1;-1)=1-i$ $\rightarrow \overline{(1;-1)}=\overline{1-i}=1+i$

$(4;3)=4+3i$

$(0;-25)=-25i$

$(2;1)=2+i$

$(4;-3)=4-3i$

$$z=\frac{(1+i)(4+3i)}{(-25i)(2+i)^2(4-3i)}$$

$$|z|=\left|\frac{(1+i)(4+3i)}{(-25i)(2+i)^2(4-3i)}\right|$$

$$|z|=\frac{|(1+i)(4+3i)|}{|(-25i)(2+i)^2(4-3i)|}$$

$$|z|=\frac{|(1+i)||(4+3i)|}{|(-25i)||(2+i)^2||(4-3i)|}$$

$$|z|=\frac{|(1+i)||(4+3i)|}{|(-25i)||2+i|^2|(4-3i)|}$$

$$|z|=\frac{\sqrt{2}.5}{25.\left(\sqrt{5}\right)^2.5}=\frac{\sqrt{2}}{125}$$

02. Calcule x, para que el número complejo obtenido en la división $\frac{x+2i}{4-3i}$, este gráficamente sobre la bisectriz del primer cuadrante.

A) 10 **B) 11** **C) 12**

D) 13 **E) 14**

$$\frac{x+2i}{4-3i} = n + ni, \qquad donde\ n > 0$$

$$x + 2i = (4-3i)(n+ni)$$

$$x + 2i = 7n + ni$$

$debido\ a\ la\ igualdad\ de\ complejos\quad x = 7n\quad y\ además\ 2 = n$

$$\boldsymbol{x = 14}$$

03. Simplifique el siguiente número complejo $\dfrac{(6+8i)^4(1+\sqrt{3}i)^{45}}{(4-3i)^4}$

A) $2^{45}\,i$ **B)** $2^{45}(1-i)$

C) $2^{15}(1+i)$ **D)** -2^{49}

E) 2^{49}

$$\frac{(6+8i)^4\left(1+\sqrt{3}i\right)^{45}}{(4-3i)^4}$$

$$\frac{\left(10cis(53°)\right)^4\left(2cis(60°)\right)^{45}}{\left(5cis(323°)\right)^4}$$

$$\frac{10^4cis(4.53°)2^{45}cis(45.60°)}{5^4cis(4.323°)}$$

$$\frac{5^4.2^4cis(212°)2^{45}cis(2700°)}{5^4cis(1292°)}$$

$$\frac{2^{49}cis(212°)cis(2700°)}{cis(1292°)}$$

$$\frac{2^{49}cis(2912°)}{cis(1292°)}$$

$$2^{49}cis(1620)=2^{49}cis(180)^\wedge=2^{49}(-1)$$

$$=-2^{49}$$

06. Dado el complejo:

$$z=\sum_{k=1}^{19}(1+i)^k$$

Calcule: J = Re(z) + Im(z)

A) 1025 **B)** 1026 **C)** 2^9

D) 2^{10} **E)** 2^{11}

$$z=(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\cdots.(1+i)^{19}$$

$$z(1+i)=(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\cdots.(1+i)^{19}+(1+i)^{20}$$

$-$

$$-zi=(1+i)-(1+i)^{20}$$

$$-zi=(1+i)-[(1+i)^4]^5$$

$$-zi=(1+i)-[-4]^5$$

$$-zi=(1+i)+4^5$$

$$-zi=1025+i$$

$$-zi.i=(1025+i)i$$

$$z=-1+1025i$$

$$Re(z)+Im(z)=1024$$

07. Calcule un valor de:

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2\sqrt[9]{i^9}}}}}}$$

A) – i B) i C) 1 – i

D) 1 E) 1 + i

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2\sqrt[9]{i^9}}}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{2i}}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-\sqrt{(1+i)^2}}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{1-(1+i)}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{-i}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\sqrt[11]{i^{11}}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i\ .i}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^2}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2\sqrt[10]{i^{10}}}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{-2i}}$$

$$\sqrt[3]{-2\sqrt{(1-i)^2}}$$

$$\sqrt[3]{-2(1-i)}$$

$$\sqrt[3]{2i-2}$$

$$\sqrt[3]{(1+i)^3} = \mathbf{1+i}$$

08. Sabiendo que:

z = cos12º – isen 12º

Halle el valor de $M = z^{15} + \dfrac{1}{z^{15}}$.

$$z = cos12 - isen12$$

$$z = \cos(-12) + isen(-12)$$

$$z = cis(-12)$$

$$z^{15} + \frac{1}{z^{15}} = \left(cis(-12)\right)^{15} + \frac{1}{\left(cis(-12)\right)^{15}}$$

$$z^{15} + \frac{1}{z^{15}} = cis\left(15(-12)\right) + \frac{1}{cis(15(-12))}$$

$$z^{15} + \frac{1}{z^{15}} = cis(-180) + \frac{1}{cis(-180)}$$

$$z^{15} + \frac{1}{z^{15}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

09. Si un número complejo z verifica la ecuación $z^2+1-\sqrt{2}.z=0$, determine el valor de:

$E=z+z^7+z^4+z^5+z^3+1+z^6+z^2$

A) 0 **B) 1** **C) i**

D) 2i **E) 4 + i**

$POR\ z$

$z^3=\sqrt{2}z^2-z$

$z^3=\sqrt{2}(\sqrt{2}z-1)-z$

$z^3=z-\sqrt{2}$

$z^4=z^2-\sqrt{2}z$

$z^4=\sqrt{2}z-1-\sqrt{2}z$

$z^4=-1$

$$
+\left|\begin{aligned}
1&=1\\
z&=z\\
z^2&=\sqrt{2}z-1\\
z^3&=z-\sqrt{2}\\
z^4&=-1\\
z^5&=-z\\
z^6&=1-\sqrt{2}z\\
z^7&=\sqrt{2}-z
\end{aligned}\right.
$$

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7=0$$

10. Si z, a, b, c, ∈ □ – {(0; 0)} / |z| = 1

$$f(z)=\left(\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right)\left(\frac{c-\overline{ab}\,\bar{z}}{ab-cz}\right)\left(\frac{a-\bar{b}\bar{z}}{az-\bar{b}}\right)$$

Determine el valor de $|f(z)|$

A) 0 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{4}$ **E)** 1

$|z|=\sqrt{z.\bar{z}}=1$ $\quad |\bar{z}|=1$ $\quad z.\bar{z}=1$

$|az+b|=|\bar{z}||az+b|$

$|az+b|=|\bar{z}(az+b)|$

$|az+b|=|az.\bar{z}+b\bar{z}|$

$|az+b|=|a\ +b\bar{z}|$

$|az+b|=\left|\overline{a\ +b\bar{z}}\right|$

$|az+b|=\left|\bar{a}\ +\overline{b\bar{z}}\right|$

$|az+b|=\left|\bar{a}\ +\bar{b}.\bar{\bar{z}}\right|$

$|az+b|=\left|\bar{a}\ +\bar{b}.z\right|$

$$|f(z)|=\frac{|az+b|}{|\bar{b}.z+\bar{a}|}\frac{|c-\bar{a}\bar{b}\bar{z}|}{|ab-\bar{c}\bar{z}|}\frac{|a-\bar{b}\bar{z}|}{|az-\bar{b}|}$$

$|f(z)|=1.1.1$

12. Se definen los conjuntos

$A = \{z + i / |z - 1| \le 2\}$

$B = \{z + 3 / \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \ge 7\}$

donde z $\in$ C.

I. A $\cap$ B = ϕ II. z = 2 + 2i $\in$ B

III.z = i $\in$ A.

A) VVV B) VVF C) VFV

D) FFF E) FVF

$$A = \{z + i \ \ tal\ que \ \ |z - 1| \le 2\}$$

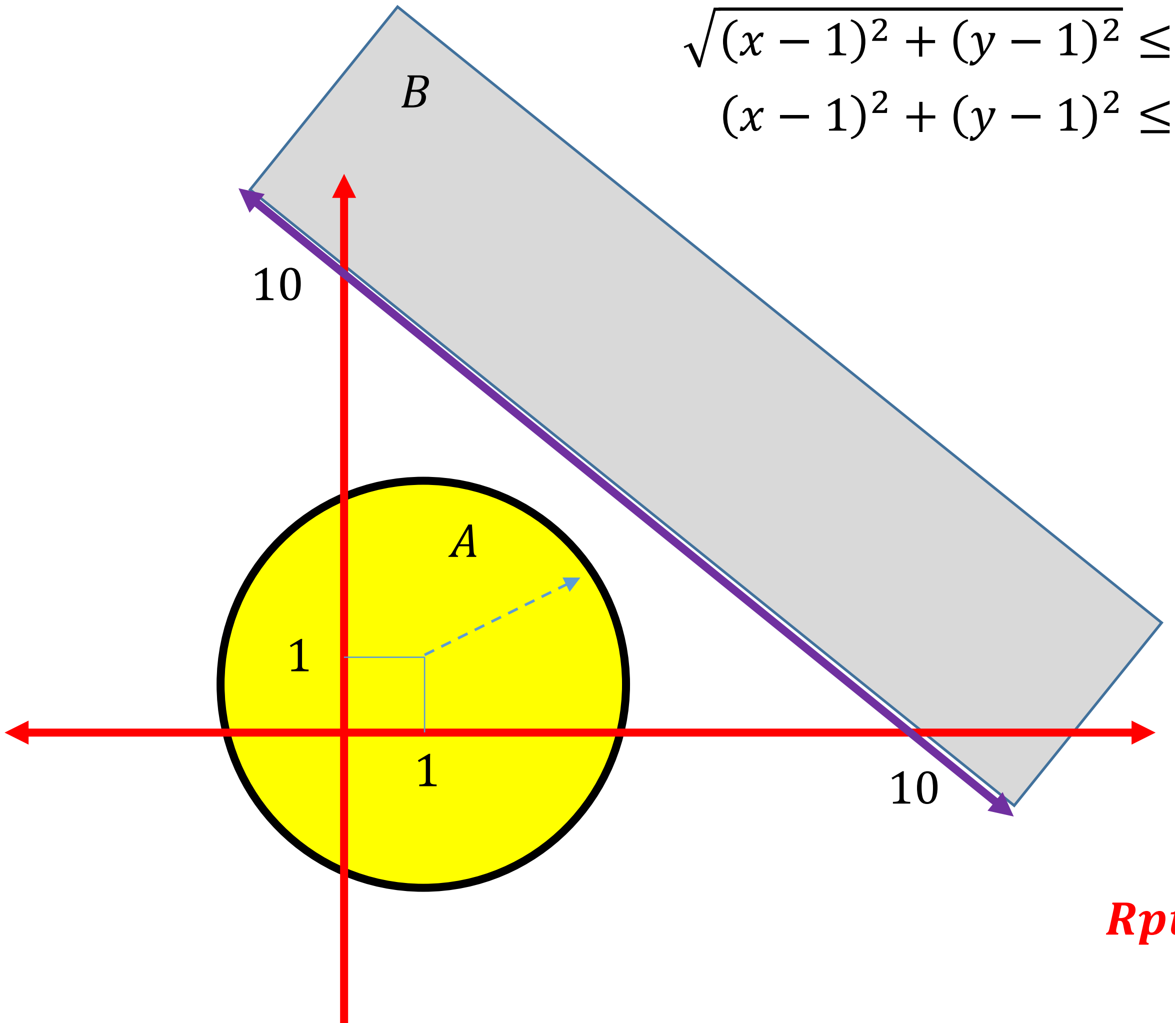
$$z + i = x + yi$$
$$z = x + (y - 1)i$$

$$|z - 1| \le 2$$
$$|x + (y - 1)i - 1| \le 2$$
$$|(x - 1) + (y - 1)i| \le 2$$
$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \le 2$$
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 4$$

$$B = \{z + 3 \ tal\ que\ Re(z) + Im(z) \ge 7\}$$

$$z + 3 = x + yi$$
$$z = x - 3 + yi$$

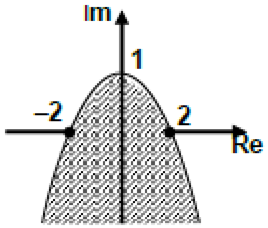
$$Re(z) + Im(z) \ge 7$$
$$x - 3 + y \ge 7$$
$$x + y \ge 10$$



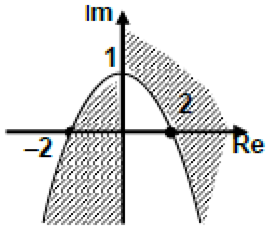
Rpta.* – *VFV

07. Si el conjunto:

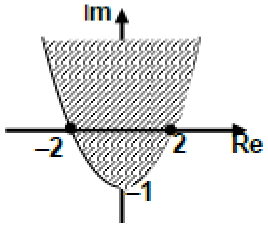
$A = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq 2 + \text{Im}(z)\}$ entonces la gráfica que mejor representa al conjunto A es:



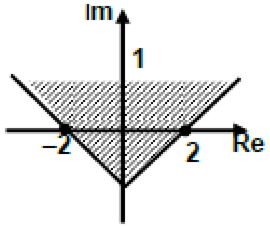
A)



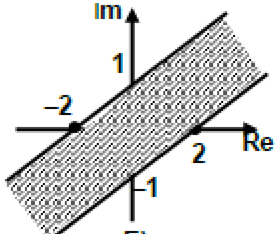
B)



C)



D)



E)

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ tal\ que \ \ |z| \leq 2 + Im(z)\}$$

$$z = x + yi$$

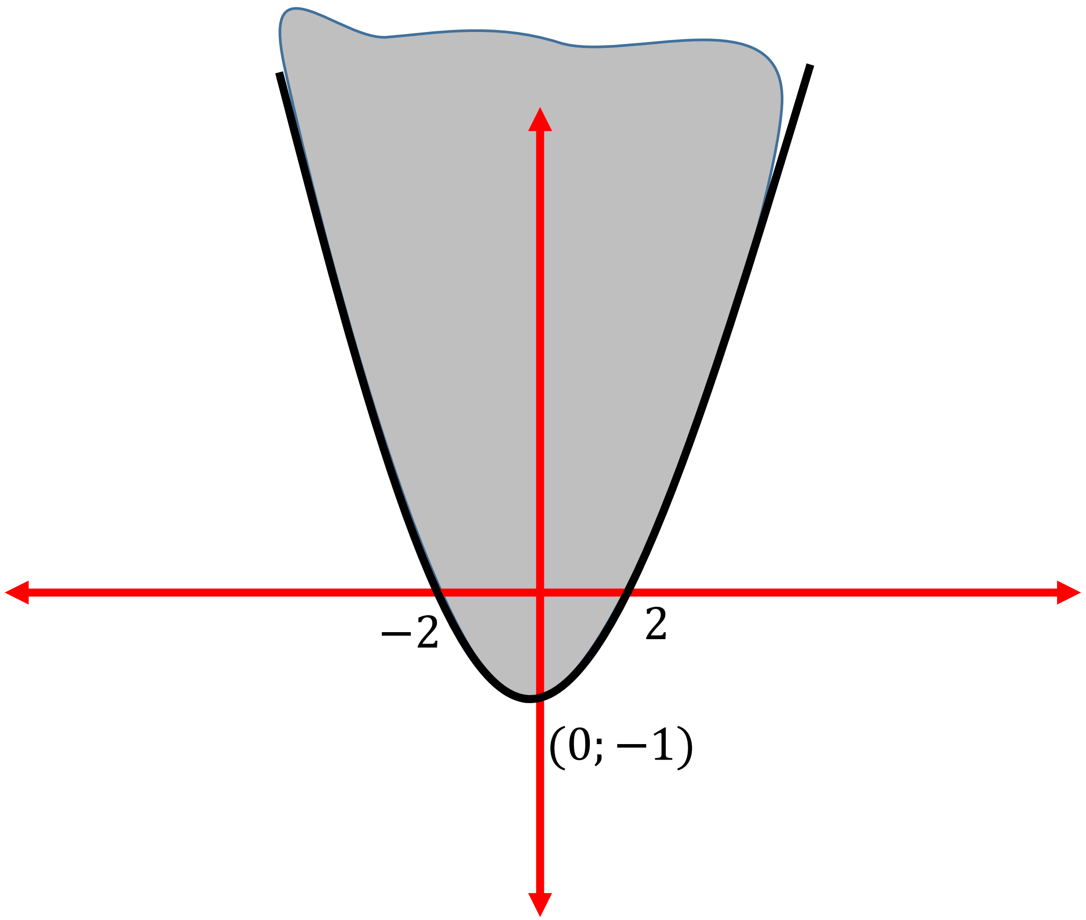
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 + y$$

$$x^2 + y^2 \leq 4 + 4y + y^2$$

$$x^2 \leq 4 + 4y$$

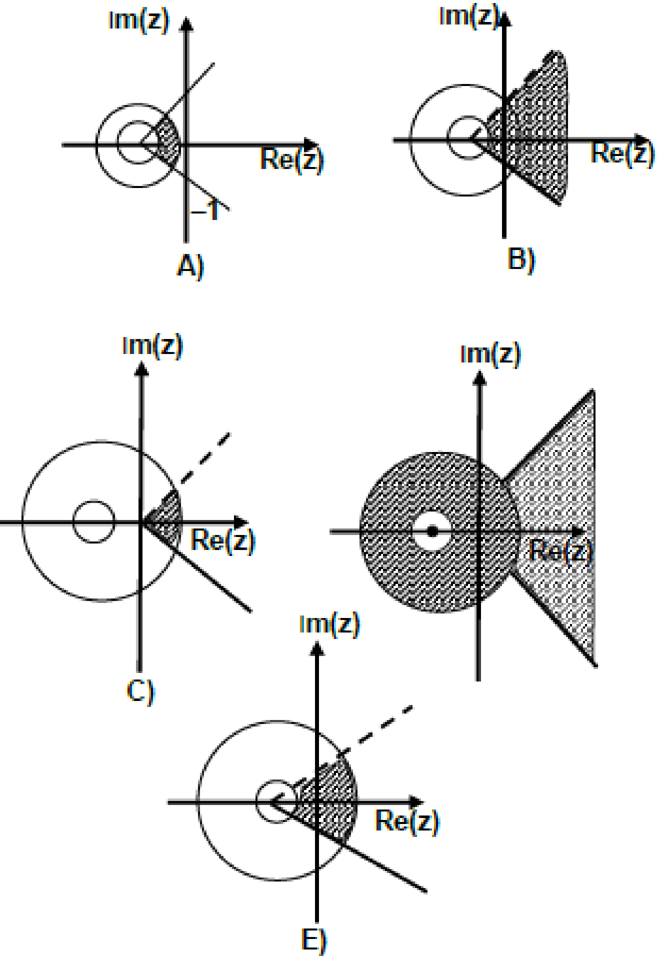
$$y \geq \frac{x^2 - 4}{4}$$

$$y \geq -2$$



08. Identifique el conjunto de puntos en el plano complejo, definido por:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\,/\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 2, |-5-3z|\le 9;\ -\frac{\pi}{6}\le \operatorname{Arg}\left(z+\frac{5}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\right\}$$



$$A=\left\{z\in\mathbb{C}\ tal\ que\ \frac{|z-1|}{|z+1|}\le 2\,,\qquad |-5-3z|\le 9,\qquad -\frac{\pi}{6}\le Arg\left(z+\frac{5}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$z=x+yi$$

$$\frac{|(x-1)+yi|}{|(x+1)+yi|}\le 2$$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}\le 2$$

$$\frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\le 4$$

$$(x-1)^2+y^2\le 4(x+1)^2+4y^2$$

$$0\le 3x^2+10x+3+3y^2$$

$$0\le x^2+\frac{10}{3}x+1+y^2$$

$$0\le\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}+1+y^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2\le\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2$$

$$|-5-3z|\le 9$$

$$|-5-3(x+yi)|\le 9$$

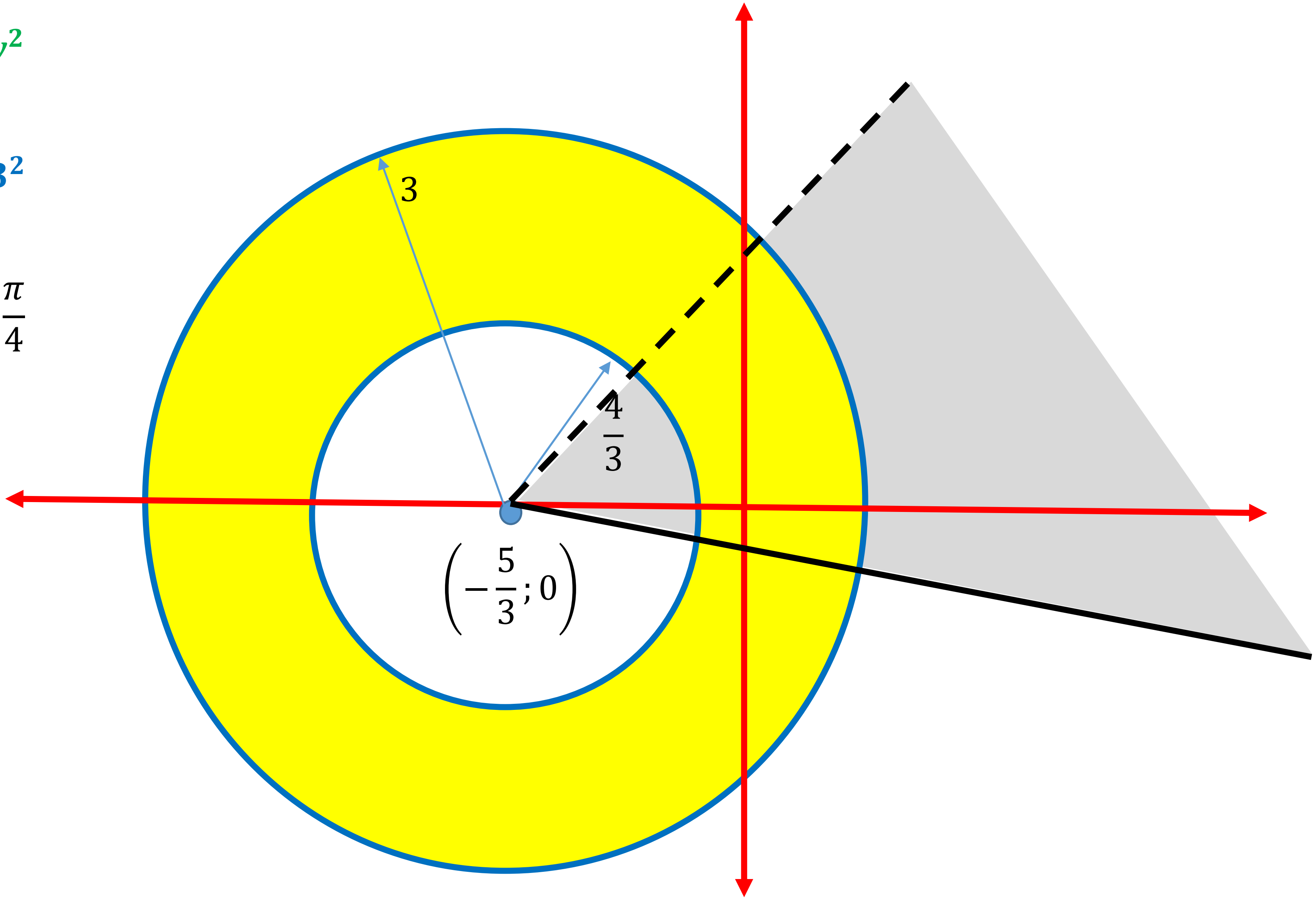
$$\sqrt{(-5-3x)^2+(-3y)^2}\le 9$$

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+(y)^2\le 3^2$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \leq \left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2$$

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + (y)^2 \leq 3^2$$

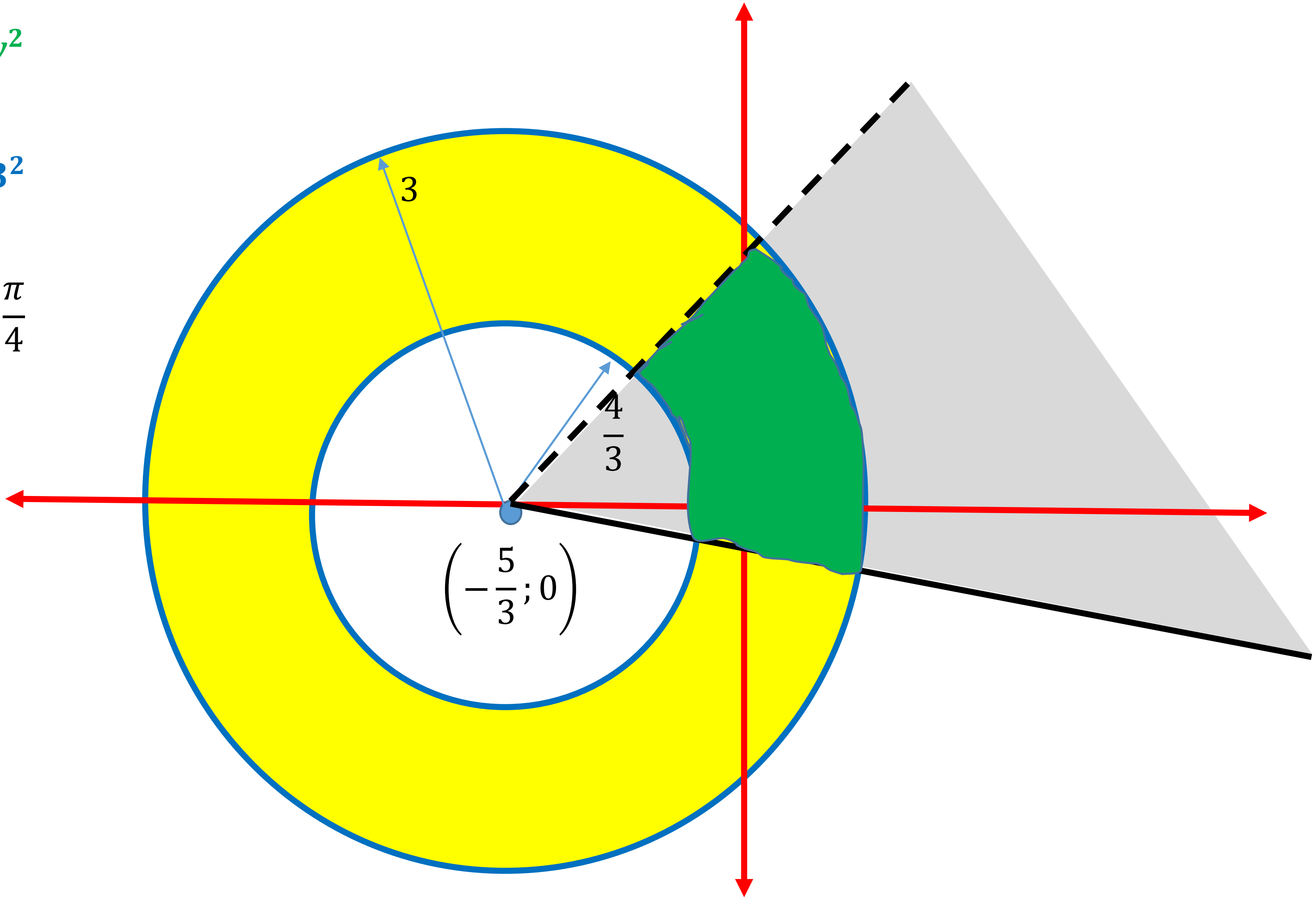
$$-\frac{\pi}{6} \leq Arg\left(z+\frac{5}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$



$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \leq \left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2$$

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + (y)^2 \leq 3^2$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq Arg\left(z+\frac{5}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$



10. En relación al polinomio complejo:
$P(z) = z^3 + 3iz^2 - (5 + 3i)\,z + 4$

¿Cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos?